Betrachtung des Temperaturfehlers für Unruhe-Spiralfeder-Schwinger

Ausgangspunkt ist die Grundgleichung für die Periodendauer eines schwingfähigen ungedämpften Feder-Masse-Systems.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Die Federkonstante einer Spiralfeder mit Windungszwischenraum

$$C = \frac{E\,b\,t^3}{15\,l} \tag{2}$$

Und das allgemeine Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}\,m \tag{3}$$

1. Vereinfachung: die gesamt Masse der Unruhe sei in einem dünne Ring mit Radius r angebracht., alle anderen Massen werden vernachlässigt

2 und 3 in 1 eingesetzt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,r^2}{\frac{E\,b\,t^3}{15\,l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{15\,l\,m\,r^2}{E\,b\,t^3}} \tag{4}$$

Es gibt viele Möglichkeiten die Abweichung zu rechnen. Eine wäre die Partielle Ableitung. Dies ist aber ohne Differentialrechnung nicht nachzuvollziehen. Eine Andere ist die Modellrechnung. Hierbei berechnet man den Masstab m, hier den Zeitmasstab m_T, zwischen zwei Varianten, bei denen alle Grössen in bestimmten Verhältnissen, also auch Massstäben m, stehen

$$m_T = \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{15\,l_1\,m_1\,r_1^2}{E_1\,b_1\,t_1^3}}}{2\pi\sqrt{\frac{15\,l_2\,m_2\,r_2^2}{E_2\,b_2\,t_2^3}}} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{l_2}\,\frac{m_1}{m_2}\,\frac{r_1^2}{r_2^2}}{\frac{E_2}{E_1}\,\frac{b_2}{b_1}\,\frac{t_2^3}{t_1^3}}} \tag{5}$$

- Die Masse m (Achtung: Buchstabe ist doppelt vergeben) verändert sich nicht, wenn sich die Temperatur ändert
- Die Federlänge l, der Radius r, die Federbreite b und die Federdicke t ändern sich alle gleich. (Was die 2. Vereinfachung ist, normalerweise besteht Feder und Unruhe aus unterschiedlichem Material)
- Der E-Modul hat seine eigenen Massstab m_E .

$$\frac{m_1}{m_2} = 1$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{t_1}{t_2} = m_l \qquad (6)$$

$$m_E = \frac{E_1}{E_2}$$

Die Massstäbe aus 6 ersetzen die Quotienten in 5

$$m_T = \sqrt{\frac{m_l 1 m_l^2}{m_E\, m_l\, m_l^3}} = \sqrt{\frac{1}{m_E\, m_l}} \qquad (7)$$

Nun ist der Massstab nicht die gewohnte Grösse, m = 1,0000116 sagt einem wenig.

11,6 x 10^{-6} ist schon üblicher, und mit 24*60*60 = 86400 multipliziert wäre das 1 s/d.

Man ersetzt also die Massstäbe durch

- die Längenausdehnung über Temperatur
- die Veränderung des E-Moduls über Temperatur (3. Vereinfachung: ist aber für Stähle von -200°C bis +300°C korrekt)
- den Primären Kompensationsfehler C (Gangabweichung pro °C)

$$m_l = \frac{l_1}{l_2} = 1 + \alpha\,\Delta t$$

$$m_E = \frac{E_1}{E_2} = 1 + \varepsilon\,\Delta t$$

$$m_f = \frac{f_1}{f_2} = 1 + C\,\Delta t \qquad (8)$$

$$m_T = \frac{T_1}{T_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1 + C\,\Delta t}$$

Die Gleichungen aus 8 in 7 eingesetzt:

$$m_f = 1 + C\,\Delta t = \frac{1}{m_T} = \sqrt{(1+\varepsilon\,\Delta t)(1+\alpha\,\Delta t)} = \sqrt{1 + \varepsilon\,\Delta t + \alpha\,\Delta t + \varepsilon\alpha\,\Delta t^2} \qquad (9)$$

Sieht nicht sehr einfach aus. Aber ausgehend von der speziellen Sachlage, dass die Veränderungen sehr klein sind, deutlich kleiner als 1, kann man einige weitere Vereinfachungen vornehmen:

- Das Produkt aus Längenausdehnungskoeffizient und Koeffizient des E-Moduls ist im Vergleich zur Summe vernachlässigbar.
  (10^{-5} x 10^{-4} ergibt 10^{-9}, in der Summe a×10^{-4} + b×10^{-5} + c×10^{-9} = 0,000ab000c vernachlässigbar)
- Die Wurzel aus 1 ist 1, die Wurzel aus der Summe von 1 und der Veränderung ist gleich der Summe aus 1 und er halben Veränderung

(Wurzel aus 1,01 ist exakt gerechnet 1,00498756…, das entspricht hinreichend genau 1 + (0,01 / 2) = 1,005)

$$1 + C\,\Delta t = \sqrt{1 + \varepsilon\,\Delta t + \alpha\,\Delta t} \cong 1 + \frac{\varepsilon\,\Delta t + \alpha\,\Delta t}{2}$$

$$C\,\Delta t = \frac{\varepsilon\,\Delta t + \alpha\,\Delta t}{2} \qquad (10)$$

Die Temperaturdifferenz gekürzt

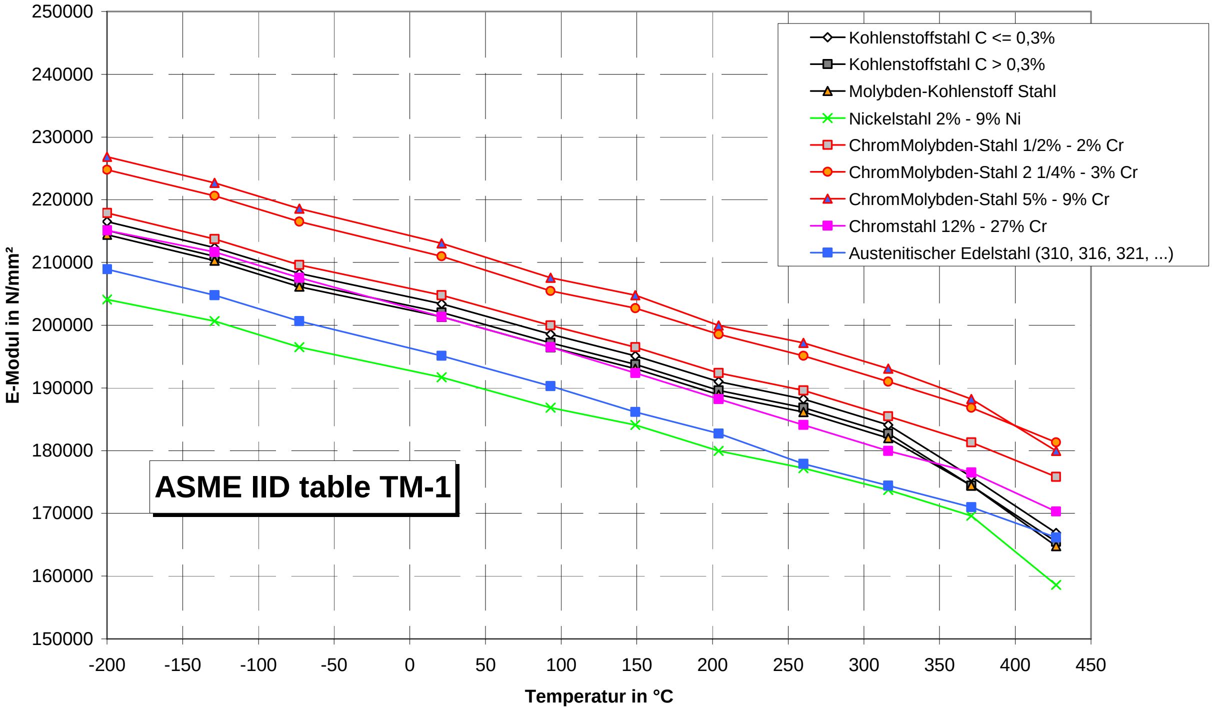
$$C = \frac{\varepsilon + \alpha}{2} \qquad (11)$$

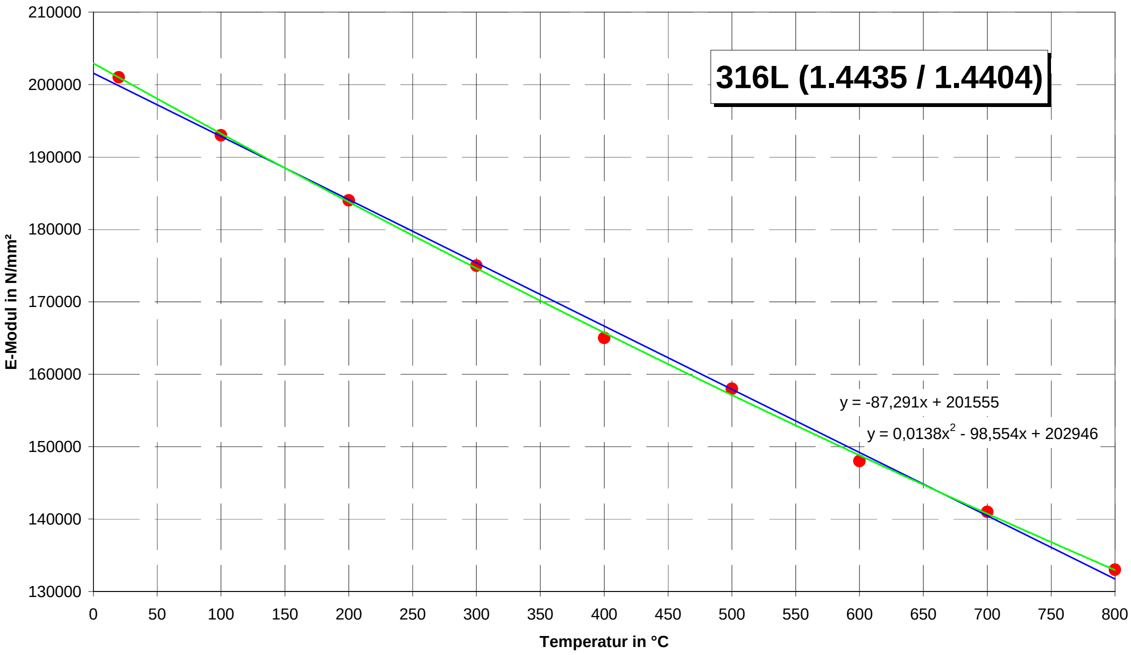
Das sieht doch schon wirklich einfacher aus.

Nun zum Thema Zahlenwerte. Werte für die Längenausdehnung sind leicht zu finden, hier ein kurzer Auszug aus Wikipedia, Stichwort >Ausdehnungskoeffizient<

Bezeichnung	**α in 10-6/K bei 20 °C**
Aluminium, rein	23,0
Beton	6 bis 14
Blei	29,3
Bronze	17,5
Chrom	6,2
Diamant	1,3
Eisen	12,2
Gold	14,2
Grauguss	9,0
Invar	1,7 bis 2,0
Konstantan	15,2
Kupfer	16,5
Magnesium	26,0
Mangan	23,0
Messing	18,4
Molybdän	5,2
Nickel	13,0
Platin	9,0
Silber	19,5
Silizium	2,0
Stahl	13,0
Stahl, rostfrei	14,4 bis 16,0
Titan	10,8
Wolfram	4,5
Zink	36,0
Zinn	26,7

Das Thema >Änderung des E-Moduls über Temperatur< ist schon nicht so verbreitet und Zahlenwerte wesentlich seltener. Hier sind Quellen eher bei Herstellerangaben als in der als Fachliteratur zu finden.





Zu den Zahlenwerten ist zu sagen, dass es sich nicht um Naturkonstanten handelt, allein schon, weil Stahllegierungen deutliche Toleranzbreiten haben und die Zusammensetzung auch in der Praxis stark schwankt. Abweichungen von Kennwerten um ±20% sind üblich. Entsprechend sollte man die Werte aus den Diagrammen auch nicht zu eng sehen, sondern nur als grobe Anhaltspunkte.

Dem entsprechend Zahlenbereiche von … bis … als Beispiel

$$\begin{aligned}
&\alpha = 10\times10^{-6}...20\times10^{-6} \\
&\varepsilon = -250\times10^{-6}...-500\times10^{-6} \\
&C = \frac{-250\times10^{-6}+20\times10^{-6}}{2}...\frac{-500\times10^{-6}+10\times10^{-6}}{2} \\
&\quad = -115\times10^{-6}...-245\times10^{-6} = -9{,}94\,\mathrm{s/d°C}...-21{,}2\,\mathrm{s/d°C}
\end{aligned} \tag{12}$$

Die in der Fachliteratur genannten etwas über 10 Sekunden sind also von dem Ergebnis bestätigt, die vor Nivarox und Co tatsächlich verwendeten Federstähle waren wohl schon auf der optimalen Seite des Stahl-Spektrums gewählt gewesen.

Macht man die 2. Vereinfachung nicht, sondern unterscheidet zwischen Längenausdehnung Unruhe α_U und Feder α_F

$$\begin{aligned}
&\frac{r_1}{r_2} = m_{l,U} \\
&\frac{l_1}{l_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{t_1}{t_2} = m_{l,F}
\end{aligned} \tag{6b}$$

ergibt sich

$$m_f = \sqrt{\frac{m_E\, m_{l,F}\, m_{l,F}^3}{m_{l,F}\, 1\, m_{l,U}^2}} = \sqrt{\frac{m_E\, m_{l,F}^3}{m_{l,U}^2}} \tag{7b}$$

analog weiter

$$\begin{aligned}
1 + C\,\Delta t &= \sqrt{\frac{(1+\varepsilon\,\Delta t)(1+\alpha_F\,\Delta t)^3}{(1+\alpha_U\,\Delta t)^2}} = \frac{1+\alpha_F\,\Delta t}{1+\alpha_U\,\Delta t}\sqrt{(1+\varepsilon\,\Delta t)(1+\alpha_F\,\Delta t)} \\
&= \frac{1+\alpha_F\,\Delta t}{1+\alpha_U\,\Delta t}\times\left(1+\frac{\varepsilon\,\Delta t+\alpha_F\,\Delta t}{2}\right) \\
&= \frac{1+\frac{\varepsilon\,\Delta t}{2}+\frac{\alpha_F\,\Delta t}{2}+\alpha_F\,\Delta t+\frac{\alpha_F\,\varepsilon\,\Delta t^2}{2}+\frac{\alpha_F\,\alpha_F\,\Delta t^2}{2}}{1+\alpha_U\,\Delta t}
\end{aligned} \tag{9b}$$

Man entfernt wieder alle Terme höher Ordnung

$$\begin{aligned}
1 + C\,\Delta t &= \frac{1+\frac{\varepsilon\,\Delta t}{2}+\frac{\alpha_F\,\Delta t}{2}+\alpha_F\,\Delta t}{1+\alpha_U\,\Delta t} = \frac{2+\varepsilon\,\Delta t+\alpha_F\,\Delta t+2\,\alpha_F\,\Delta t}{2+2\,\alpha_U\,\Delta t} \\
C\,\Delta t &= \frac{2+\varepsilon\,\Delta t+3\,\alpha_F\,\Delta t}{2+2\,\alpha_U\,\Delta t} - 1 = \frac{2+\varepsilon\,\Delta t+3\,\alpha_F\,\Delta t}{2+2\,\alpha_U\,\Delta t} - \frac{2+2\,\alpha_U\,\Delta t}{2+2\,\alpha_U\,\Delta t} = \\
&= \frac{\varepsilon\,\Delta t+3\,\alpha_F\,\Delta t-2\,\alpha_U\,\Delta t}{2+2\,\alpha_U\,\Delta t}
\end{aligned} \tag{10b}$$

Hier kann man nicht so einfach nur kürzen, sondern setzt die Temperaturdifferenz auf = 1.

$$C = \frac{\varepsilon + 3\alpha_F - 2\alpha_U}{2 + 2\alpha_U\,\Delta t} \tag{11b}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} \alpha_U &= 18{,}5\times10^{-6} \\ \alpha_F &= 13{,}0\times10^{-6} \\ \varepsilon &= -250\times10^{-6} \\ C &= \frac{-250\times10^{-6} + 3\times13\times10^{-6} - 2\times18{,}5\times10^{-6}}{2 + 2\times18{,}5\times10^{-6}\times\Delta t} = \frac{-248\times10^{-6}}{2{,}000...} \\ &\cong -124\times10^{-6} = -10{,}7\,\mathrm{s/d°C} \end{aligned} \tag{12b}$$

An den Zahlenbeispielen sieht man auch deutlich, dass der lineare Term im Nenner ebenfalls vernachlässigbar ist, solange ($\alpha_U\ \Delta t$) << 2 ist, eine letzte Vereinfachung und erhält damit endlich

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon + 3\alpha_F - 2\alpha_U}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{2}\alpha_F - \alpha_U} \tag{13}$$

Und eigentlich auch ganz einfach, man vergleiche 13 mit 7b:

$$\begin{aligned} \sqrt{m_E} &= m_E^{1\times\frac{1}{2}} = m_E^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \quad +\frac{1}{2}\varepsilon \\ \sqrt{m_{l,F}^3} &= m_{l,F}^{3\times\frac{1}{2}} = m_{l,F}^{\frac{3}{2}} && \Rightarrow \quad +\frac{3}{2}\alpha_F \\ \sqrt{\frac{1}{m_{l,U}^2}} &= m_{l,U}^{-2\times\frac{1}{2}} = m_{l,U}^{-1} && \Rightarrow \quad -\alpha_U \\ \sqrt{\frac{m_E\, m_{l,F}^3}{m_{l,U}^2}} & && \Rightarrow \quad +\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{2}\alpha_F - \alpha_U \end{aligned} \tag{14}$$

Aus jedem Faktor x^y der Funktion wird ein Summand y×x der Abweichung.

Schlussbemerkung: Würde sich der E-Modul nicht ändern ($\varepsilon = 0$), dann wären es nur

$$C = \frac{3\times13\times10^{-6} - 2\times18{,}5\times10^{-6}}{2} = \frac{2\times10^{-6}}{2} = +1\times10^{-6} = +0{,}17\,\mathrm{s/d°C} \tag{15}$$